

# ABSTRACT

## QUANTUM MECHANICAL COMPUTATION OF BILLIARD SYSTEMS WITH ARBITRARY SHAPES

İnci Erhan

Ph.D., Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hasan TAŞELİ

December 2003

An expansion method for the stationary Schrödinger equation of a particle moving freely in an arbitrary axisymmetric three dimensional region defined by an analytic function is introduced. The region is transformed into the unit ball by means of coordinate substitution. As a result the Schrödinger equation is considerably changed. The wavefunction is expanded into a series of spherical harmonics, thus, reducing the transformed partial differential equation to an infinite system of coupled ordinary differential equations. A Fourier-Bessel expansion of the solution vector in terms of Bessel functions with real orders is employed, resulting in a generalized matrix eigenvalue problem.

The method is applied to two particular examples. The first example is a prolate spheroidal billiard which is also treated by using an alternative method. The numerical results obtained by both methods are compared. The second example is a billiard family depending on a parameter. Numerical results concerning the second example include the statistical analysis of the eigenvalues.

**Keywords:** Billiard Systems, Schrödinger Equation, Eigenfunction Expansion, Eigenvalue Problem, Spherical Harmonics

# ÖZ

## KEYFİ ŞEKİLLİ BİLARDO SİSTEMLERİNİN KUANTUM MEKANİKSEL HESAPLAMALARI

İnci Erhan  
Doktora, Matematik Bölümü  
Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Hasan TAŞELİ

Aralık 2003

Analitik bir fonksiyon ile tanımlanan ve döneel simetrisi olan keyfi bir üç boyutlu bölgede, serbest hareket eden bir parçacığın Schrödinger denklemi için açılım yöntemi verilmektedir. Bir koordinat dönüşümü vasıtası ile bölge birim küreye dönüştürülmektedir. Bunun sonucunda, Schrödinger denklemi de önemli ölçüde değişikliğe uğramaktadır. Dalga fonksiyonu küresel harmonikler cinsinden seriye açılmaktadır ve böylece, değişmiş olan kısmi diferansiyel denklemi sonsuz boyutlu bir diferansiyel denklem sistemine indirgemektedir. Çözüm vektörü için reel mertebeli Bessel fonksiyonları cinsinden Fourier-Bessel açılımları kullanılmaktadır ve denklem sistemi genelleştirilmiş bir matris özdeğer problemine dönüştürülmektedir.

Yöntem iki özel örneğe uygulanmaktadır. Birinci örnek “prolate spheroid” şeklindeki bilardo sistemidir ve aynı anda alternatif bir yöntemle daha incelenmektedir. Her iki yöntemle elde edilen sayısal sonuçlar karşılaştırılmaktadır. İkinci örnek bir parametreye bağılı bir bilardo ailesidir. Bu örneğe ait sayısal sonuçlar özdeğerlerin istatistiksel analizini de içermektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Bilardo Sistemleri, Schrödinger Denklemi, Özfonksiyon Açılımı, Özdeğer Problemi, Küresel Harmonikler